

**Contrôle d'analyse II**

Durée: 3h

Exercice 1. (1+2)=3ptsSoit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque.
2. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à tout ordre, au voisinage de 0.
Former ce développement à l'ordre 5.

Exercice 2. ((1+1)+1+(1+1))=5pts

1. Calculer les intégrales suivantes

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \sin x}, \quad \text{b) } \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx,$$

2. Calculer la limite de la suite suivante

$$u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}.$$

3. Étudier la nature des intégrales généralisées suivantes:

$$\text{a) } \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}, \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$$

Exercice 3. (1+1+1+0,5)=3,5pts

Soit l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' - 3xy = 1 \quad (\text{E})$$

1. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que parmi les fonctions solutions de (E), une seule (que l'on notera g) admet une limite finie en $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de cette fonction g au voisinage de $+\infty$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x^3}$.
4. Étudie les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (1+1+1+1,5)=3,5ptsSoit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1 + \cos t}{\sqrt{t^4 - t^2 + 4}} dt$

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier la parité de f (on ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$).
2. Étudier la dérivabilité de f et déterminer la fonction dérivée f' .

3. Montrer qu'il existe un point c de $]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

4. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5. (1+1+1+1+1)=5pts

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ et croissante sur $[a, b]$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

1. Montrer que le nombre $\frac{b-a}{n} R_n(f)$ (resp $\frac{b-a}{n} S_n(f)$) représente l'intégrale d'une fonction en escalier minorant f (majorant f).

2. Montrer que l'ensemble $R_f = \left\{ \frac{b-a}{n} R_n(f) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est majoré par $(b-a)f(b)$ et que l'ensemble $S_f = \left\{ \frac{b-a}{n} S_n(f) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est minoré par $(b-a)f(a)$.

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} (S_n(f) - R_n(f)) = 0$.

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} R_n(f) = \int_a^b f(t) dt$.

5. Calculer par cette méthode $\int_0^1 x^3 dx$,
sachant que $\sum_{p=1}^n p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Bonne inspiration

Proposition de cours (Analyse II, MPI)
(juillet 2017)

Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrons que f admet une fonction réciproque.
* On a : $e^x - 1 \sim_0 x$, d'où $\lim_0 f = 0$, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

* f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, car somme et quotient de telles fonctions et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^x(2x^2 - 1) + 1}{x^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $g : x \mapsto (2x^2 - 1)e^x + 1$.

$$g'(x) = 2xe^{x^2}(2x^2 + 1)$$

g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $g(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geq 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) > 0$. Par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus que $f(0) = 0$ et f impaire, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et $f(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} et de ce fait

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$$

2- on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\forall y \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

Ainsi on montre par récurrence que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. f^{-1} admet donc un développement limité en 0 à tout ordre,

f^{-1} est aussi impaire et on a donc :

$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^5) \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5),$$

$$f \circ f^{-1}(x) = ax + (b + \frac{a}{2})x^3 + (\frac{a}{6} + \frac{3b}{2} + c)x^5 + o(x^5).$$

Comme $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$, alors :

$$a = 1, b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{7}{12}$$

$$f^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{7}{12}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 2:

1- Calculons les intégrales suivantes.

$$a) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \sin x} = I$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{2(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arctan} \frac{2}{\sqrt{3}} (t + \frac{1}{2}) \right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$b) \int_1^2 x \sqrt{x^2 - 2x + 5} dx = I$$

$$I = \int_1^2 x \sqrt{(x-1)^2 + 4} dx$$

$$x-1 = 2 \sinh t \Rightarrow I = \int_0^{\operatorname{Arsinh} \frac{1}{2}} (1+2 \sinh t) \cdot 2 \cosh t \cdot 2 \cosh t dt$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\operatorname{Arsinh} \frac{1}{2}} 4 \cosh^2 t dt + 8 \int_0^{\operatorname{Arsinh} \frac{1}{2}} \sinh t \cosh^2 t dt = 2 \left[t + \frac{\sinh 2t}{2} \right]_0^{\operatorname{Arsinh} \frac{1}{2}} + \frac{8}{3} [\cosh^3 t]_0^{\operatorname{Arsinh} \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow I = 2 \operatorname{Arsinh} \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3}$$

2. Calcul de la limite de $U_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$

$$\text{Soit } V_n = \ln U_n$$

$$V_n = \ln n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

On reconnaît la somme de Riemann :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln 2 - 1$$

Par conséquent $\lim_n V_n = +\infty$ et donc $\lim_n U_n = \lim_n e^{V_n} = +\infty$

3. Nature des intégrales généralisées :

$$a) \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_e^{\lambda} \frac{dt}{t \ln t} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(\ln \lambda) = +\infty$$

$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$ est donc divergente

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x} = I$$

on a $e^x - \cos x \sim x$

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est divergente selon Riemann, donc I diverge.

Exercice 3

$$(E): (1+x^2)y' - 3xy = 1$$

1. les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$(E_H): (1+x^2)y' - 3xy = 0$$

$$y_H = k(1+x^2)^{3/2}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

soit $y_p = k(x)(1+x^2)^{3/2}$ une solution particulière de (E) (méthode de la variation de la constante).
 y_p vérifie (E) et donc ?

$$k'(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^{5/2}} \Rightarrow k(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^{5/2}} dx$$

$$x = \sinh t \Rightarrow k(x) = \int \frac{1}{\cosh^4 t} dt$$

$$u = \tanh t \Rightarrow \cosh^2 t = \frac{1+u^2}{1-u^2} = 2 \cosh^2 t - 1 \Rightarrow$$

$$\cosh^2 t = \frac{1}{1-u^2} \text{ et donc}$$

$$k(x) = \int 1-u^2 du \quad \text{car } t = \operatorname{arctanh} u \Rightarrow dt = \frac{du}{1-u^2}$$

$$\text{d'où } k(x) = u - \frac{1}{3}u^3$$

en suite :

$$y_G = y_H + y_P = k(1+x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}x^3 + x, \quad k \in \mathbb{R}$$

2- limite en $+\infty$ des fonctions solutions de (E).

$$y_G = x^3 \left[k \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_G(x) = \infty \quad \text{si } k \neq -\frac{2}{3} \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_G(x) \text{ est finie si } k = -\frac{2}{3} \text{ d'o } g(x) = -\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}x^3 + x$$

3- un équivalent de g .

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{4x} \quad \text{car}$$

$$g(x) = x^3 \left[-\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3/2} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3} \right] \underset{+\infty}{\sim} x^3 \left[-\frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^4} \right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$\text{on a aussi } g(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-1}{4x} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x^3} = 0$$

4- les variations de g .

on déduit les variations de g de sa dérivée.

$$g'(x) = -2x(1+x^2)^{1/2} + 2x + 1$$

Exercice 1

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1 + \cos t}{\sqrt{t^4 - t^2 + 4}} dt$$

1 - Ensemble de définition de f et parité de f .
La fonction $g: t \mapsto \frac{1 + \cos t}{\sqrt{t^4 - t^2 + 4}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est intégrable sur tout segment $[x, 2x] \subset \mathbb{R}$ en résulte que f est définie sur $\mathbb{R}$.

on a : $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t) dt$

En posant $y = -t$, on a : $f(-x) = \int_x^{2x} g(y) dy$

comme g est paire alors

$$f(-x) = - \int_{2x}^x g(y) dy = -f(x), \text{ d'où } f \text{ est impaire.}$$

2 - Dérivabilité et dérivée de f .

Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x g(t) dt$.

comme g est continue sur $\mathbb{R}$ alors G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = g(x)$.

on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = G(2x) - G(x)$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = G'(2x) - G'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$f'(x) = \frac{2(1 + \cos 2x)}{\sqrt{16x^4 - 4x^2 + 4}} - \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 4}}$$

Montrons qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
 $f'(0) = 1$ et $f'(1) = \frac{\cos^2 1 - \cos 1}{2}$
 f' est continue sur $[0, 1]$ et telle que $f'(0) > 0$ et $f'(1) < 0$,
 il existe donc un point $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

4- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Au voisinage de $+\infty$, $0 \leq g(x) \leq \frac{2}{\sqrt{t^4 - t^2}}$. On en déduit que,

par exemple, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} g(t) = 0$, il existe donc $A > 0$ tel

que $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^{3/2} |g(t)| < 1$. Il en résulte que

$\forall x > A$, $|\int_x^{2x} g(t) dt| < \int_x^{2x} \frac{1}{t^{3/2}} dt = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)$ et

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t^{3/2}} dt = 0$. On en déduit que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5 :

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

1- Soit $\{x_k\}$ la subdivision du segment $[a, b]$ définie par
 $x_0 = a$, $x_n = b$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$
 et soit la fonction g définie par.

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}[, g(x) = f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right), \text{ si } 0 \leq k \leq n-2$$

$$\forall x \in [x_{n-1}, b], g(x) = f\left(a + (n-1) \frac{b-a}{n}\right).$$

est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Soit $\alpha \in [a, b]$. Il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que

$$\alpha \in [x_k, x_{k+1}[.$$

- fonction f est croissante sur $[x_k, x_{k+1}[$, d'où
 $f(\alpha) \geq f(x_k) = f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = g(\alpha)$ il résulte $f(\alpha) \geq g(\alpha)$.

On a aussi $f(b) \geq g(b)$.

on en déduit que g est une fonction qui minore f sur $[a, b]$.

L'intégrale de g sur $[a, b]$ est égale à

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) g(x_k) = \frac{b-a}{n} R_n(f).$$

De manière analogue, on montre que la fonction

h , définie par :

$$\forall x \in]x_k, x_{k+1}], h(x) = f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right) \text{ si } 1 \leq k \leq n-1,$$

$$\forall x \in [a, x_1], h(x) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\right),$$

est une fonction qui majore f sur $[a, b]$ et dont
 l'intégrale sur $[a, b]$ est égale à $\frac{b-a}{n} S_n(f)$.

est croissante sur $[a, b]$, on a donc

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \leq f(b).$$

$$\text{et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \geq f(a).$$

D'où $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{b-a}{n} R_m(f) \leq (b-a)f(b) \text{ et } \frac{b-a}{n} S_m(f) \geq (b-a)f(a).$$

Par conséquent, R_f est majoré par $(b-a)f(b)$ et S_f est minoré par $(b-a)f(a)$.

$$3 - \text{ Montrons que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} (S_m(f) - R_m(f)) = 0.$$

Comme $S_m(f) - R_m(f) = f(b) - f(a)$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} [S_m(f) - R_m(f)] = 0.$$

$$4 - \text{ Deduction de } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} S_m(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} R_m = \int_a^b f(t) dt$$

f est définie et croissante sur le segment $[a, b]$; elle y est donc intégrable.

Comme $\forall x \in [a, b], g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx, \text{ d'où}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \frac{b-a}{n} R_m(f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} S_m(f).$$

les points $\left(\frac{b-a}{n} R_m(f)\right)_{m \in \mathbb{N}^+}$ et $\left(\frac{b-a}{n} S_m(f)\right)_{m \in \mathbb{N}^+}$ sont

adjacentes et, par suite, ont la même limite. D'où

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} R_m(f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} S_m(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

5°) la fonction $f: x \mapsto x^3$ est définie et croissante

sur $[0, 1]$. On a :

$$R_m(f) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4n^3} = \frac{(n-1)^2}{4n}$$

$$\text{et } S_m(f) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^2}{4n}$$

$$\text{on a : } \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} R_m(f) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_m(f) = \frac{1}{4}, \text{ d'où}$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Session de rattrapage d'analyse II

Durée: 3h

Exercice 1. (1+2)=3ptsSoit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

1. Montrer que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n , quel que soit n .
2. Former le développement limité d'ordre 6 de f au voisinage de 0. En déduire le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction :

$$g: x \mapsto x \cotan x.$$

Exercice 2. (0,5+2+1+1,5)=5ptsSoit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 .
2. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a

$$n \geq 2 \implies n I_n = (n-1) I_{n-2}.$$

En déduire la valeur de I_{2p} et I_{2p+1} pour p entier positif.

3. Vérifier que $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \implies \cos^n t \leq \cos^{n-1} t \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
4. Montrer que la suite u définie par, $\forall p \in \mathbb{N}^*, u_p = \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}}$ converge vers 1 et en déduire

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{2.4.6 \dots (2n-2).2n}{1.3.5 \dots (2n-3).(2n-1)} \right]^2.$$

Exercice 3. (1+1)=2ptsSoit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.
2. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$S_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^3}}.$$

Exercice 4. (2+1+2)=5pts

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 e^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$$

2. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$.

3. Calculer les primitives suivantes :

$$a) \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx, \quad b) \int x \arctan x dx.$$

Exercice 5. (0,5+0,5+1+1+2)=5pts

Soit l'équation

$$(E) \quad (x^2 + 1)y'' - 2y = 0.$$

1. Établir qu'une éventuelle solution polynomiale et non nulle de (E) est nécessairement de degré deux.
2. Trouver une solution polynomiale et non nulle p de (E).
3. Justifier qu'une fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = pz$ où z est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E) si et seulement si la fonction $Z = z'$ (où z est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un (E') à préciser.
5. Résoudre (E).

Bonne inspiration

Proposition de corrigé (Session analyse II, MP1, 1)
(2016-2017)

Exercice 1:

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

1. Montrons que f admet un $DL_n(0)$ pour tout n .

La fonction $\frac{1}{f}$ admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre n :

$$\text{on a: } \frac{1}{f}(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \leq n}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + o(x^n). \quad (1)$$

du fait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 1$ qui est non nulle, alors f admet un développement limité au voisinage de 0 au même ordre que $\frac{1}{f}$.

2. $DL_6(0)$ de f et de g

* le $DL_6(0)$ de $\frac{1}{f}$ est: $\frac{1}{f}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6)$

en faisant la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040}$ on obtient: 2

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + o(x^6)$$

* on a: $g(x) = x \cotan x$

comme $g(x) = f(x) \times \cos x$ alors $g(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} + o(x^6)$ 2

Exercice 2 :

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m t \, dt$$

1. Calcul de I_0, I_1 et I_2 .

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2 \quad ; \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{\pi}{4}$$

(1)

2. Montrons que $m \geq 2 \Rightarrow m I_m = (m-1) I_{m-2}$

$$* I_{m+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{m+1} t \cdot \cos t \, dt = \left[\sin t \cos^m t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^m t \, dt$$

du fait que $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, on obtient

$$I_{m+2} = (m+1) [I_m - I_{m+2}], \text{ d'où } (m+2) I_{m+2} = (m+1) I_m$$

(1)

On en déduit que $(\forall m \in \mathbb{N}) \, m \geq 2 \Rightarrow m I_m = (m-1) I_{m-2}$

* Déduisons la valeur de I_{2p} et I_{2p+1}

Par un raisonnement par récurrence on montre que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2p-3)(2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2p-2) \cdot 2p}$$

(1)

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2p-2) \cdot 2p}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1) \cdot (2p+1)}$$

3. Vérifions que $t \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos^n t \leq \cos^{n-1} t$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos t \leq 1$ de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos^n t = \cos^{n-1} t \cos t$

d'où $t \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos^n t \leq \cos^{n-1} t$ (1)

car $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$; $\cos t \geq 0$

4. Montrons que u converge vers 1.

$$* \forall p \in \mathbb{N}^*, U_p = \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}}$$

on a : $U_p = \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}} = \frac{2p}{2p-1}$ et par conséquent

$$\lim_p U_p = 1. \quad (1)$$

* on déduit de la question 3) que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos^{2p} t \leq \cos^{2p-1} t \leq \cos^{2p-2} t, \text{ Il vient}$$

que $I_{2p} \leq I_{2p-1} \leq I_{2p-2}$ il s'ensuit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}}. \quad (\text{1})$$

Comme $\lim_p \frac{I_{2p-2}}{I_{2p}} = 1$, alors $\lim_p \frac{I_{2p-1}}{I_{2p}} = 1$ et par suite

$$\lim_p \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cdot 4 \cdots (2p-2)) \cdot 2p}{(3 \cdot 5 \cdots (2p-1))^2} = 1 \text{ d'où}$$

$$\pi = \lim_n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n}{(3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2} = \pi$$

4) Exercice 3

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$$

1. Calculons $\int_0^1 f(x) dx$

Posons $t = x^2$,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(1+t)^3}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^{3/2}}$$

$$\text{donc } \int_0^1 f(x) dx = \left[\sqrt{1+t} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{\sqrt{1+t}} \right]_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$$

(1)

2. Déterminons la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$S_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{(1+(\frac{k}{n})^2)^3}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(\frac{k}{n})^3}{\sqrt{[1+(\frac{k}{n})^2]^3}}$$

$$= \frac{1}{n} \left[f\left(0+\frac{1}{n}\right) + f\left(0+\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(0+\frac{n}{n}\right) \right].$$

(1)

D'après la définition de la somme de Riemann on a:

$$\lim_n S_n = \int_0^1 f(t) dt = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$$

Exercice 4:

1. Calcul des intégrales :

$$- I_1 = \int_0^1 e^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) dx = \int_0^1 \left(e^x + \frac{x^2}{2} \right) dx - \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$+ \int_0^1 e^x + \frac{x^2}{2} dx = e - \frac{5}{6}$$

+ une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \\ &= \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

$$I_1 = e + \frac{1}{6} - \ln 4.$$

(2)

$$- I_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$\text{Posons } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^e \frac{u-1}{u(u+1)} du = \int_1^e \frac{u}{u+1} - \frac{1}{u} du = e \left[\ln|1+u| \right]_1^e - [\ln|u|]_1^e \\ &= \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)^e - 1 \end{aligned}$$

(1)

2 - Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{\alpha} \frac{\ln t}{t^2} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} \ln \alpha - \frac{1}{\alpha} + 1 \right) = 1$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ est convergente.

(1)

3. Calcul des primitives

a) $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx$

$$\int \frac{x^3}{x^2+4} dx = \int x - \frac{4x}{x^2+4} dx = \frac{x^2}{2} - 2 \ln(x^2+4) + C$$

(1)

b) $\int x \arctan x dx$

Par intégration par partie on obtient:

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2-1) \arctan(x) - \frac{x}{2} + k. \end{aligned}$$

(1)

Exercice 5

$$(E) \quad (x^2+1)y'' - 2y = 0$$

1. Le polynôme solution éventuelle non nulle est de degré

soit $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ une solution de (E).

$$P' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

$$P'' = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2$$

P vérifie (E) :

$$(x^2+1)P'' - 2P = 0 \Rightarrow (x^2+1)(n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots + a_2) - 2(a_n x^n + \dots + a_0) = 0$$

$$\Rightarrow n(n-1)a_n x^n - 2a_n x^n = 0 \Rightarrow (n(n-1)-2)a_n = 0 \Rightarrow$$

comme $P \neq 0$ alors $a_n \neq 0$ donc $n(n-1)-2 = 0 \Rightarrow$
 $n=2$ car $n \in \mathbb{N}$.

1

2. Une solution polynomiale non nulle p de (E).

$$\text{Soit } P = ax^2 + bx + c$$

$$P' = 2ax + b$$

$$P'' = 2a$$

1

$$(x^2+1) \times 2a - 2(ax^2+bx+c) = 0 \Rightarrow$$

$$2ax^2 + 2a - 2ax^2 - 2bx - 2c = 0 \Rightarrow$$

$$-2bx + 2a - 2c = 0 \Rightarrow b=0 ; a=c$$

on peut considérer $P = ax^2 + a$ c'ad $a \in \mathbb{R}^*$

on vérifie que $P = ax^2 + a$ est une solution de (E), avec $a \in \mathbb{R}^*$

3. Montrons qu'une fonction y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $y = pg$ où g est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit y une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

on a : $\frac{y}{p}$ est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car p est non nulle et étand quotient de telles fonctions. en posant $g = \frac{y}{p}$ on obtient $y = pg$ d'où le résultat, 2

4. Montrons que y solution de (E) si $Z = g'$ est solution de (E)' à préciser.

$$\text{on a : } y = pg \Leftrightarrow y' = p'g + pg' \Rightarrow y'' = p''g + p'g' + p'g' + pg''$$

$$\Rightarrow y'' = p''g + 2p'g' + pg''$$

$$y \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow (x^2+1)(p''g + 2p'g' + pg'') - 2pg = 0 \quad \textcircled{1}$$

En prenant $p = \frac{1}{2}(x^2+1)$ on obtient

$$(x^2+1)(y + 2xy' + \frac{1}{2}(x^2+1)y'') - (x^2+1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+1)^2 y'' + 2x(x^2+1)y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+1)y'' + 2xy' = 0 \quad \text{car } x^2+1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+1)Z' + 2xZ = 0 \quad \text{avec } Z = y'$$

$$\Leftrightarrow Z \text{ est solution de } (E'): \frac{1}{2}(x^2+1)Z' + 2xZ = 0.$$

5. Résolution de $(\bar{E})$.

Réolvons d'abord (E') .

$$\frac{1}{2}(x^2+1)Z' + 2xZ = 0 \Leftrightarrow \frac{Z'}{Z} = \frac{-2x}{\frac{1}{2}(x^2+1)} = -4 \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{Z'(x)}{Z(x)} dx = \int -4 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|Z(x)| = -2 \ln|x^2+1| + k$$

$$\Leftrightarrow |Z(x)| = e^k \cdot e^{-2 \ln(x^2+1)} = e^k \times \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \pm e^k \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{c}{(x^2+1)^2} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

$$Z = y' = \frac{c}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y = \int \frac{c}{(x^2+1)^2} dx = c \frac{x-1}{(x^2+1)^2} \quad (\text{intégration par partie})$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{c}{(x^2+1)^2} dx = c \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} dx = c \left[\int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx \right]$$

$$= c \left[\int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \right] = c \left[\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \right]$$

$$J = \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{1}{2} e^{\frac{x}{1+x^2}} \right)$$

comme $y = pJ$ alors les solutions de (E) sont

$$y = c(x^2 + 1) \left[\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right]$$